

Dorel Duca Ioan Purdea Ovidiu Pop

Cristian Buican Ovidiu Cojocaru Cornel Sandu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M2

**Filiera teoretică, profil real,
specializarea științe ale naturii**

Filiera tehnologică, toate calificările profesionale

EDITURA GIL

Cuprins

1	Primitive (antiderivate)	7
1.1	Probleme care conduc la noțiunea de primitivă	7
1.2	Primitive. Integrala nedefinită a unei funcții	11
1.3	Operații cu funcții care admit primitive	12
1.4	Metoda integrării prin părți	20
1.5	Metoda schimbării de variabilă	23
1.6	Integrarea unor funcții raționale	27
1.7	Teste pentru verificarea cunoștințelor	36
2	Integrala Riemann	39
2.1	Calculul ariilor suprafețelor plane	39
2.2	Funcții integrabile Riemann	43
2.3	Integrala Riemann a unei funcții continue	47
2.4	Proprietăți ale integralei Riemann	49
2.5	Teste pentru verificarea cunoștințelor	73
3	Aplicații ale integralei Riemann	75
3.1	Aria suprafețelor plane	75
3.2	Volumul corpurilor de rotație	79
3.3	Test pentru verificarea cunoștințelor	82
4	Legi de compoziție (operații)	85
4.1	Noțiunea de lege de compoziție (operație)	85
4.2	Proprietăți ale unei legi de compoziție (operație)	87

4.2.1	Asociativitatea	87
4.2.2	Comutativitatea	89
4.2.3	Elementul neutru	91
4.3	Părți stabile. Lege de compoziție (operație) indusă	92
4.4	Teste pentru verificarea cunoștințelor	106
5	Monoizi și grupuri	109
5.1	Monoizi. Elemente simetrizabile	110
5.2	Grupuri	118
5.3	Morfisme și izomorfisme de grupuri	134
5.4	Test pentru verificarea cunoștințelor	148
6	Inele și corpuri	151
6.1	Noțiunile de inel și corp. Proprietăți elementare și exemple	151
6.2	Morfisme și izomorfisme de inele și de corpuri	161
6.3	Test pentru verificarea cunoștințelor	169
7	Polinoame și funcții polinomiale	171
7.1	Inelul polinoamelor cu coeficienți într-un inel comutativ. Gradul unui polinom	171
7.2	Împărțirea polinoamelor	178
7.2.1	Teorema împărțirii cu rest	178
7.2.2	Împărțirea unui polinom la $X - a$	180
7.2.3	Schema lui Horner	182
7.3	Divizibilitatea polinoamelor	183
7.4	Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al polinoamelor	188
7.5	Ecuatii algebrice	194
7.6	Ecuatii bipătrate. Ecuatii reciproce	202
7.6.1	Ecuatii bipătrate	202
7.6.2	Ecuatii reciproce	203
7.7	Relații între rădăcini și coeficienți	205
7.7.1	Formulele lui Viète	205
7.7.2	Determinarea unei ecuații când se cunosc rădăcinile ei	208
7.8	Polinoame cu coeficienți reali. Descompunerea unui polinom în factori ireductibili	212
7.9	Polinoame cu coeficienți raționali. Polinoame cu coeficienți întregi	215
7.10	Teste pentru verificarea cunoștințelor	228
	Indicații și răspunsuri	241

Primitive (antiderivate)

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcții reale și anume **clasa funcțiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** și **integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenței primitivelor precum și de natura **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

1.1 Probleme care conduc la noțiunea de primitivă

Exemplul 1.1.

Presupunem că un corp este aruncat din punctul $M(x_0, y_0)$, unde $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0)$ sub unghiul $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, cu viteza inițială v_0 (m/s) (vezi figura 1).

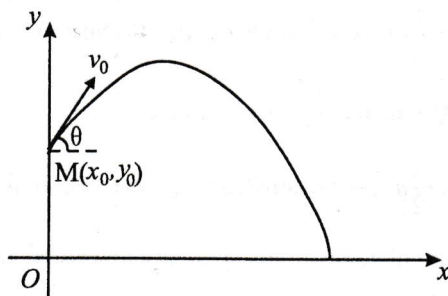


Figura 1.

Atunci componenta orizontală a vectorului viteză $\vec{v}$ la momentul $t = 0$ este $v_0 \cos \theta$, iar componenta verticală este $v_0 \sin \theta$.

În cele ce urmează neglijăm rezistența aerului și faptul că pământul nu este plat.

Atunci viteza corpului în direcția orizontală (axa Ox) este constantă, adică

$$x'(t) = v_0 \cos \theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Urmează că

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t + c_0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Cum $x(0) = 0$, obținem că $c_0 = 0$ și deci

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Pe de altă parte, accelerația în direcția verticală (axa Oy), în lipsa rezistenței aerului, se datorează numai gravitației, adică avem

$$y''(t) = -g, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

(unde $g \approx 9.81 \text{ cm/s}^2$ este accelerația gravitațională). Rezultă că

$$y'(t) = -gt + c_1, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

și cum $y'(0) = v_0 \sin \theta$, obținem că $c_1 = v_0 \sin \theta$ și deci

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin \theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

De aici deducem că

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + c_2, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Întrucât $y(0) = y_0$, obținem că $c_2 = y_0$. Așadar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + y_0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Eliminând parametrul t , obținem ecuația carteziană explicită a traiectoriei corpului

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x + y_0, \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

Aplicație.

Un tenisman lovește mingea la o înălțime de 50 cm de sol trimitând-o pe o traiectorie înclinată la 45° față de orizontală, cu viteza inițială de 72 km/oră. Neglijând rezistența aerului, traiectoria mingii este o parabolă a cărei ecuație se cere. Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea? La ce distanță de tenisman, mingea atinge solul?

În această aplicație, $v_0 = 72 \text{ km/h} = \frac{72000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$ și $y_0 = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m}$. Ecuația traiectoriei este

$$y = -\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2}, \text{ unde } x \geq 0.$$

Înălțimea maximă la care ajunge mingea este

$$y_{\max} = " - \frac{\Delta}{4a} " = \frac{1 + \frac{g}{200}}{\frac{g}{100}} = \frac{g}{100} + \frac{1}{2} \simeq 10,69 \text{ m}.$$

Mingea atinge solul când $y = 0$, adică pe x îl aflăm rezolvând ecuația

$$-\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0,$$

cu $x > 0$. Soluția convenabilă este $x = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{g}{200}}}{\frac{g}{200}} \simeq 41,26 \text{ m}.$

Exemplul 1.2.

Se consideră o bilă de masa m care cade la momentul $t_0 = 0$ de la o anumită înălțime. Se presupune că rezistența aerului este direct proporțională cu viteza bilei. Ne punem problema determinării vitezei bilei în fiecare moment $t \geq 0$.

În acest scop să notăm cu c factorul de proporționalitate, iar cu $v(t)$, respectiv $a(t)$, viteza și respectiv accelerația bilei la momentul t . Atunci

$$ma(t) = mg - cv(t) \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

unde g este accelerația gravitațională. Ținând seama că accelerația este derivata vitezei, relația precedentă devine

$$v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g, \text{ sau } \left(v(t)e^{\frac{ct}{m}} - \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} \right)' = 0 \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Utilizând consecința teoremei lui Lagrange care afirmă că o funcție derivabilă care are derivata nulă pe un interval este constantă, rezultă că există $K \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$v(t)e^{\frac{ct}{m}} = \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} + K \text{ oricare fi } t \geq 0,$$

de unde se deduce formula de calcul pentru $v(t)$.

Exemplul 1.3.

Se consideră un mediu cu temperatura constantă $T_0 = 60^\circ C$ în care se scufundă un corp aflat inițial la $180^\circ C$. Se presupune că viteza de răcire a corpului la orice moment t este direct proporțională cu diferența dintre temperatura $T(t)$ a corpului și temperatura T_0 a mediului. Ne propunem să aflăm după cât timp temperatura corpului ajunge la $90^\circ C$, știind că după un minut temperatura a coborât la $120^\circ C$.

Să notăm cu c factorul de proporționalitate. Deoarece

$$T(0) = 180^\circ > T_0 = 60^\circ$$

și T este o funcție continuă, rezultă că există un interval $I = [0, t_0]$ cu $t_0 > 0$, inclus în mulțimea $\{t \geq 0 \mid T(t) > T_0\}$.

Prin ipoteză avem că $T'(t) = c(T_0 - T(t))$, ceea ce se mai scrie și astfel

$$\frac{T'(t)}{T_0 - T(t)} = c,$$

sau

$$[\ln(T(t) - T_0) + ct]' = 0 \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

De aici rezultă că există $K \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\ln(T(t) - T_0) + ct = K \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

Ținând seama că $T(1) = 120^\circ$, rezultă $K = c + \ln 60$ și deci

$$\ln(T(t) - T_0) + ct = c + \ln 60.$$

Dacă $T(t_1) = 90$, atunci $\ln 30 = c + \ln 60 - ct_1$ și deci

$$t_1 = \frac{\ln 2 + c}{c} \text{ minute.}$$

Comentariu metodic.

În exemplele precedente ne-am confruntat cu problema determinării unor funcții la care se cunoaște derivata.

1.2 Primitive. Integrala nedefinită a unei funcții

În calculul diferențial s-a considerat problema calculării derivatei unei funcții derivabile date. Este posibil să inversăm această problemă în sensul schimbării rolul funcțiilor cunoscute și calculate. Ajungem astfel la

Definiția 2.1.

Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că funcția f **admite primitivă pe I** dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- a) F este derivabilă pe I ;
- b) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Funcția F se numește **primitivă** a funcției f .

Observația 2.1. În cele ce urmează, vom considera că mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ este interval.

Exemplul 2.1.

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 3x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitiva $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deoarece F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2.2.

Funcția $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$ admite primitiva $F : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = -\cos x$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$, deoarece F este derivabilă pe $(0, \pi]$ și $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$.

Propoziția 2.1.

Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe I , atunci:

1. Pentru orice două primitive $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ale lui f , există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$.
2. Dacă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă fixată a lui f , atunci pentru orice primitivă G a lui f există o constantă reală c , astfel încât $G(x) = F(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$.

Demonstrație. 1. Dacă $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale lui f , atunci $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$. Rezultă că există o constantă c , astfel încât

$$F_1(x) - F_2(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

2. Rezultă din 1).

Comentariu metodic.

Din **Propoziția 2.1** rezultă că dacă o funcție admite o primitivă, atunci ea admite o infinitate primitive.

Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe I și funcția $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă fixată a lui f , atunci toate primitivele funcției f sunt de forma $F + c$, unde c este o constantă reală arbitrară.

Definiția 2.2.

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I . Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe I se numește **integrala nedefinită a funcției f** și se notează cu

$$\int f(x) dx.$$

Operația de calculare a primitivelor unei funcții care admite primitive se numește **integrare**.

Comentariu metodic.

Deci, dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe I și $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci

$$\int f(x) dx = \{F + c | c \in \mathbb{R}\}.$$

Deci, pentru determinarea mulțimii $\int f(x) dx$, adică a mulțimii primitivelor funcției f pe I , este suficient să determinăm una dintre acestea, căci oricare alta diferă printr-o constantă.

1.3 Operații cu funcții care admit primitive

Am văzut că dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive pe I , atunci mulțimea primitivelor sale este o mulțime de funcții inclusă în mulțimea tuturor funcțiilor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ne punem acum problema operațiilor cu funcții care admit primitive și să vedem dacă este posibilă stabilirea unor rezultate analoage cu cele din calculul diferențial, unde avem, de exemplu, că derivata sumei este egală cu suma derivatelor. Pentru a extinde acest rezultat în cazul primitivelor trebuie să definim **operații cu mulțimi de funcții**.

Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval și mulțimea

$$\mathcal{F}(I) = \{f|f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\},$$

adică mulțimea funcțiilor definite pe I , cu valori reale. Pe mulțimea $\mathcal{F}(I)$ definim operațiile:

a) **adunarea funcțiilor**

Oricare ar fi $f, g \in \mathcal{F}(I)$, **funcția sumă** a funcțiilor f și g notată $f + g$, definită prin $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Facem observația că oricare ar fi $f, g \in \mathcal{F}(I)$, rezultă că

$$f + g \in \mathcal{F}(I).$$

b) **înmulțirea funcțiilor cu scalari**

Oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(I)$, **funcția produs** a funcției f cu scalarul λ notată λf , definită prin $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Avem că oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}(I)$, rezultă că

$$\lambda f \in \mathcal{F}(I).$$

Dacă $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sunt submulțimi nevide ale lui $\mathcal{F}(I)$, atunci definim

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f + g | f \in \mathcal{G} \text{ și } g \in \mathcal{H}\}$$

și

$$\lambda \cdot \mathcal{G} = \{\lambda \cdot f | f \in \mathcal{G}\}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dacă mulțimea $\mathcal{G}$ este formată dintr-un singur element f , $\mathcal{G} = \{f\}$, atunci mulțimea $\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f\} + \mathcal{H}$, o vom scrie simplificat $f + \mathcal{H}$, deci

$$f + \mathcal{H} = \{f + g | g \in \mathcal{H}\}.$$

Notăm cu $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor constante definite pe I , adică

$$\mathcal{C} = \{f|f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ constantă pe } I\}.$$

Are loc următoarea

Propoziția 3.1.

- a) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$.
- b) $\lambda \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Deci, suma a două funcții constante este tot o funcție constantă, iar o funcție constantă înmulțită cu un scalar este tot o funcție constantă.

Observația 3.1. Fie funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f admite primitive pe I și fie $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Ținând seama de definiția integralei nedefinite a funcției f și de operațiile cu funcții definite mai sus, avem că

$$\int f(x) dx = \{F | F : I \rightarrow \mathbb{R}, F \text{ este primitivă a lui } f\} = F_0 + \mathcal{C}.$$

Ținând seama de **Propoziția 3.1**, avem că

$$\int f(x) dx + \mathcal{C} = (F_0 + \mathcal{C}) + \mathcal{C} = F_0 + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = F_0 + \mathcal{C},$$

deci

$$\int f(x) dx + \mathcal{C} = \int f(x) dx.$$

Observația 3.2. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe I și F este o primitivă a lui f , atunci

$$\int f(x) dx = F + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F'(x) dx = F + \mathcal{C}.$$

Teorema 3.1.

Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ admit primitive pe I și $\lambda \in \mathbb{R}^*$, atunci

1. Funcția $f + g$ admite primitive pe I și

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

2. Funcția λf admite primitive pe I și

$$\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

Demonstrație. În demonstrație vom ține seama și de **Propoziția 3.1.**

1. Dacă f și g admit primitive pe I , atunci există $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile pe I cu $F' = f$ și $G' = g$. Atunci suma $F + G$ este derivabilă pe I și

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

De aici rezultă că funcția $f + g$ admite primitive pe I și

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F + G + C.$$

Dar $\int f(x)dx = F + C$, $\int g(x)dx = G + C$, de unde

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = (F + C) + (G + C) = (F + G) + (C + C) = F + G + C,$$

deci

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. Dacă F este o primitivă pe I a funcției f , atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}^*$, funcția λF este derivabilă pe I și

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

ceea ce arată că funcția λf admite primitive pe I . Avem că $\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda F + C$ și $\lambda \int f(x)dx = \lambda(F + C) = \lambda(F + C) = \lambda F + \lambda C = \lambda F + C$, deci

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Consecința 3.1.

Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, admit primitive pe I și $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, atunci funcția $\lambda f + \mu g$ admite primitive pe I și

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

Demonstrație. Ținând seama de **Teorema 3.1**, avem că funcțiile λf și μg admit primitive pe I și

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx,$$